A Greedy Algorithm for Constructing Region-Fault Tolerant Geometric Spanners

D. Bakhshesh, M. Farshi

*Assistant Professor, Department of Computer Science, Bojnord University, Bojnord, Iran

(Received: 16/02/2022, Accepted: 01/06/2022)

ABSTRACT

In this paper, In this paper, the problem of constructing an error-tolerant geometric cover of bounded regions for a subclass of convex regions is discussed. Let S be a set of n points on the plane. More specifically, in this paper, a greedy algorithm for constructing the fault-region-tolerant geometric cover in the case where the fault regions are a set of Hanim half-planes with a parallel boundary of at most k lines is investigated. We show that the proposed algorithm has the time complexity $O(kn^3 \log n)$*, and the generated graph contains* $O(kn)$ *edges. To the best of our knowledge, the best-known algorithm to construct the region-fault tolerant geometric spanner of S takes* $O(n \log^2 n)$ *time and the generated graph has* $O(n \log n)$ *edges.*

Keywords: Geometric Spanners, Communication Networks, Greedy Algorithm.

* Corresponding Author Email: D.bakhshesh@ub.ac.ir

نشریه علمی "پدافند الکترونیکی و سایبری"

سال دهم، شماره ۴، زمستان ۱۴۰۱، ص ۸۰- ۷۵

علمی – پژوهشی

یک الگوریتم حریصانه برای ساخت پوشاننده هندسی تحمل‌پذیر ناحیه– خطا

داوود بخشش[1]، محمد فرشی[2*]

۱- استادیار، گروه علوم کامپیوتر، دانشگاه بجنورد، بجنورد، ۲- دانشیار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه یزد، یزد، ایران

(دریافت: ۱۴۰۰/۱۱/۲۷، پذیرش: ۱۴۰۱/۰۳/۱۱)

چکیده

در این مقاله، مسئله ساخت پوشاننده هندسی تحمل‌پذیر ناحیه- خطا مقید به زیرکلاسی از نواحی محدب موردبحث قرار می‌گیرد. فرض کنید که S مجموعه‌ای از n نقطه در صفحه باشد؛ به‌طور دقیق‌تر، در این مقاله، یک الگوریتم حریصانه برای ساخت پوشاننده هندسی تحمل‌پذیر ناحیه-خطا در حالتی که ناحیه‌های خطا، مجموعه‌ای از نیم‌صفحه‌ها با مرز موازی با حداکثر k خط است، بررسی می‌شود. نشان داده شده است که پیچیدگی زمانی الگوریتم پیشنهادی $O(kn^3 \log n)$ و گراف تولیدشده توسط آن دارای $O(kn)$ یال است. طبق آخرین اطلاعاتی که داریم بهترین الگوریتمی که برای ساخت یک پوشاننده هندسی تحمل‌پذیر ناحیه-خطا برای مجموعه نقطه S ارائه شده است، دارای زمان اجرای $O(n \log^2 n)$ است و گراف تولیدشده توسط آن دارای یال است.

کلیدواژه‌ها: پوشاننده هندسی، شبکه‌های ارتباطی، الگوریتم حریصانه

۱- مقدمه

امروزه با گسترش شبکه‌های ارتباطی و به‌تبع آن افزایش حملات به آن‌ها، داشتن دانشی جهت طراحی شبکه‌هایی با امنیت بالا بیش‌ازپیش احساس می‌شود. شبکه‌های کامپیوتری، شبکه‌های مخابراتی، شبکه‌های بی‌سیم، شبکه ارتباطی راه‌های بین‌شهری، شبکه راه‌های هوایی، نمونه‌هایی از شبکه‌های ارتباطی است. در زمینه مقابله با حملاتی که شبکه‌ها را تهدید می‌کند تاکنون کارهای تحقیقاتی گسترده‌ای انجام شده است [۱ و ۲]. ساخت یک شبکه ارتباطی باکیفیت و با هزینه کم، یک مسئله بسیار مهم در طراحی شبکه‌های ارتباطی است. از دیگر مسائل مهم در طراحی یک شبکه ارتباطی، تحمل‌پذیری آن شبکه در برابر حملات، بلایای طبیعی نظیر سیل و زلزله و خرابی‌های احتمالی است. به‌طور مثال فرض کنید که ناحیه‌ای از شبکه‌های مخابراتی و یا شبکه‌های ارتباطی راه‌های بین‌شهری در اثر بمباران و حملات دشمن آسیب ببینند. اگر شبکه تحمل این‌گونه حملات را نداشته باشد عملاً آن شبکه بدون استفاده باقی می‌ماند؛ بنابراین اگر بتوانیم شبکه‌هایی را طراحی کنیم که حتی با ایجاد خرابی در ناحیه‌ای از آن همچنان مانند گذشته قابل بهره‌برداری باشند، عملاً دشمن با حمله به این شبکه‌ها ناکام می‌ماند. از منظر پدافند غیرعامل، داشتن شبکه‌هایی که در برابر حملات دشمن تحمل‌پذیر هستند، اهمیت بالایی دارد زیرا اگر شبکه‌ای نسبت به حملات، کارکرد خود را حفظ کند، دشمن برای حمله به آن‌ها هزینه نمی‌کند. *پوشاننده‌های هندسی تحمل‌پذیر ناحیه-خطا* مدلی از طراحی یک شبکه ارتباطی است که هم هزینه ساخت آن قابل‌کنترل است و هم در برابر حملات و خرابی‌های احتمالی تحمل‌پذیر است.

فرض کنید S مجموعه‌ای از نقاط در صفحه و $t > 1$ یک عدد حقیقی باشد. فرض کنید G گرافی هندسی با مجموعه رئوس S باشد. اگر برای دو رأس p و q در G، طول یک مسیر بین p و q در G حداکثر t برابر فاصله اقلیدسی بین p و q ($|pq|$) باشد، آن مسیر را یک t-مسیر بین p و q در می‌نامند. اگر بین هر زوج رأس از گراف G یک t-مسیر وجود داشته باشد، آنگاه G را یک t- *پوشاننده* می‌نامند. کمترین مقدار که به ازای آن گراف هندسی G یک t-پوشاننده است را *ضریب کشش* G می‌نامند. کارهای تحقیقاتی گسترده‌ای در زمینه پوشاننده‌های هندسی انجام شده است. خواننده می‌تواند جهت مطالعه کلیات پوشاننده‌های هندسی و الگوریتم‌های آن‌ها به مرجع [۸] رجوع کند. لازم به ذکر است که شبکه‌های روی سطح زمین، با تقریب خوبی می‌توانند یک شبکه هندسی باشند، زیرا سطح زمین را می‌توان با تقریب خوبی یک صفحه در نظر گرفت.

در سال ۲۰۰۹، آبام و همکارانش [۱] پوشاننده‌های هندسی تحمل‌پذیر ناحیه-خطا را به‌عنوان نوع جدیدی از پوشاننده‌های هندسی معرفی کردند. فرض کنید $\mathcal{K}(S)$ گراف کامل روی مجموعه نقطه S باشد و F یک ناحیه در صفحه باشد. فرض کنید که $G \ominus F$ گرافی باشد که از حذف همه نقاطی از S که داخل قرار می‌گیرند و حذف همه یال‌هایی که ناحیه F را قطع می‌کنند، به دست می‌آید. گراف $G \ominus F$ را یک t-پوشاننده برای $\mathcal{K}$ می‌نامند هرگاه هر دو رأس p و q در $G \ominus F$ توسط مسیری به هم وصل باشند به‌طوری‌که طول آن مسیر حداکثر برابر طول کوتاه‌ترین مسیر بین p و q در $\mathcal{K}(S) \ominus F$ باشد.

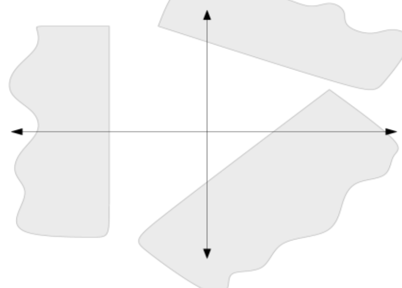
* رایانامه نویسنده مسئول: D.bakhshesh@ub.ac.ir

ناشر: دانشگاه جامع امام حسین (ع)

فرض کنید $\mathcal{F}$ خانواده‌ای از نواحی در صفحه باشد. گراف G را یک -پوشاننده تحمل‌پذیر $\mathcal{F}$-خطا می‌نامند هرگاه به ازای هر ناحیه F ، گراف $G \ominus F$ یک t-پوشاننده برای $\mathcal{K}(S) \ominus F$ باشد.

فرض کنید که $\mathcal{C}$ خانواده همه نواحی محدب در صفحه باشد. آبام و همکارانش [۱] نشان دادند که برای هر مجموعه‌ای از نقطه در صفحه، می‌توان یک t-پوشاننده تحمل‌پذیر $\mathcal{C}$-خطا با یال در زمان $O(n\log^2 n)$ ساخت. علاوه بر این، آن‌ها نشان دادند که برای هر مجموعه‌ای از n نقطه که در حالت محدب در صفحه قرار گرفته باشند، می‌توان یک t-پوشاننده تحمل‌پذیر $\mathcal{C}$-خطا با $O(n)$ یال در زمان $O(n\log n)$ ساخت. در مقاله [۷]، بخشش و همکارش نشان دادند که گراف یائوی پیوسته $cY(\theta)$ که نوع جدیدی از گراف یائو است، به ازای – یک t-پوشاننده تحمل‌پذیر $\mathcal{C}$-خطا که $t \geq \frac{1}{1-2\sin\theta/2}$. در مقاله [۸] بخشش و فرشی ثابت کردند که $cY(\theta)$ به ازای یک t-پوشاننده تحمل‌پذیر $\mathcal{C}$-خطا است که t فقط وابسته به پارامتر θ است. لازم به ذکر است که تعداد یال‌های گراف یائوی پیوسته $cY(\theta)$ از مرتبه $O(n^2)$ است.

فرض کنید که $\mathcal{H}_x$ خانواده همه نیم‌صفحاتی باشد که خط مرزی آن‌ها موازی محور xهاست. در این مقاله، یک الگوریتم حریصانه جهت محاسبه یک t-پوشاننده تحمل‌پذیر $\mathcal{H}_x$-خطا برای مجموعه S ارائه می‌شود که تعداد یال‌های آن $O(n)$ و زمان اجرای آن $O(n^3\log n)$ است. لازم به ذکر است که در الگوریتم ارائه‌شده توسط آبام و همکارانش، تعداد یال‌های t-پوشاننده تحمل‌پذیر $\mathcal{H}_x$-خطا برابر با $O(n\log n)$ است، اما الگوریتم پیشنهادشده در این مقاله، تعداد یال‌ها را به $O(n)$ بهبود می‌دهد. لازم به ذکر است که پیچیدگی زمانی الگوریتم پیشنهادی بیشتر از پیچیدگی زمانی الگوریتم آبام و همکارانش است. فرض کنید که $k \geq 1$ عددی طبیعی باشد و ℓ_k مجموعه‌ای از k خط در صفحه باشد. فرض کنید که $\mathcal{D}_k$ خانواده همه نیم‌صفحاتی باشد که خط مرزی هر نیم‌صفحه موازی خطی در ℓ_k باشد (شکل (۱)). در این مقاله، همچنین نشان داده می‌شود که برای هر مجموعه S شامل n نقطه در صفحه، یک t-پوشاننده تحمل‌پذیر -خطا با $O(kn)$ یال وجود دارد که در زمان محاسبه می‌شود.



شکل (۱). سه نیم‌صفحه در

از حیث ارزیابی خوب بودن یک پوشاننده هندسی، معیارهای مختلفی در نظر گرفته می‌شود. از جمله این معیارها می‌توان به تعداد یال‌های پوشاننده (اندازه پوشاننده) اشاره کرد (کتاب [۸]). حال از دیدگاه نظری، اگر بتوان برای یک مسئله، الگوریتمی ارائه کرد که تعداد یال‌های گراف خروجی آن کمتر باشد، یک امتیاز محسوب می‌شود. از دیدگاه تجربی، کم بودن تعداد یال‌های یک گراف، در کاهش حجم منابع بسیار تأثیرگذار است. به‌طور مثال، اگر گراف تولیدشده توسط الگوریتمی، شبکه ارتباطی شهرها از طریق بزرگراه باشد، هر چه تعداد یال‌های این گراف کمتر باشد، هزینه لازم جهت تعمیر و نگهداری بزرگراه‌ها کمتر خواهد بود. در الگوریتم پیشنهادی ما، هرچند زمان اجرای آن در مقایسه با الگوریتم آبام و همکارانش [۱] بیشتر است ولی تعداد یال‌های گراف خروجی برای وقتی‌که k مقدار ثابتی است، از لحاظ پیچیدگی به‌طور مجانبی کمتر از تعداد یال‌های گراف تولیدی الگوریتم آبام و همکارانش [۱] است. لازم به ذکر است که در الگوریتم پیشنهادی، دار k، ورودی الگوریتم است و بسته به تعداد خطوط مرزی ℓ_k موردنیاز، می‌تواند متغیر باشد و در نتیجه نمی‌توان کران بالایی هم برای آن در نظر گرفت. اگر مقدار k عدد ثابتی باشد، درنتیجه می‌توان در محاسبه زمان اجرا و تعداد یال‌ها از متغیر k چشم‌پوشی کرد. اما اگر مقدار k به‌گونه‌ای باشد که وابسته به n باشد و به‌طور مثال ترکیب خطی از n باشد، عملاً تعداد یال‌ها و زمان اجرای الگوریتم پیشنهادی به‌ترتیب $O(n^2)$ و $O(n^4\log n)$ خواهد بود که البته در این حالت بهتر است از روش ارائه‌شده توسط آبام و همکارانش [۱] استفاده شود.

ساختار مقاله به‌صورت زیر است. در بخش دوم مقاله، مفاهیم اولیه و الگوریتم شناخته‌شده مسیر-حریصانه ارائه می‌شود. در بخش سوم، الگوریتم پیشنهادی جهت ساخت t-پوشاننده تحمل‌پذیر $\mathcal{D}_k$- خطا ارائه می‌شود و زمان ساخت و تعداد یال‌های آن موردبررسی قرار می‌گیرد. در بخش چهارم، نشان داده می‌شود که پوشاننده مسیر- حریصانه اصلی ضرورتاً یک - پوشاننده تحمل‌پذیر $\mathcal{D}_1$- خطا نیست. سرانجام، در بخش پنجم، مقاله نتیجه‌گیری می‌شود.

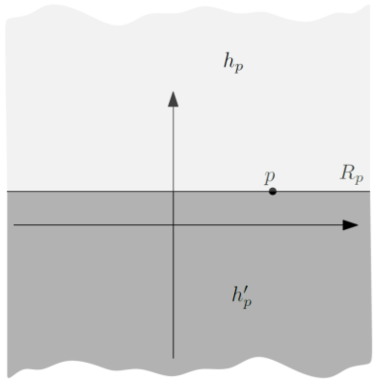
۲- مفاهیم اولیه

فرض کنید S مجموعه‌ای از n نقطه در صفحه باشد. برای هر نقطه $p \in S$، فرض کنید که p_y مختصات y نقطه p باشد. دو مجموعه S_p و S'_p به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\{q \in S | q_y \geq p_y \},$$

$$\{q \in S |\ q_y < p_y\}.$$

فرض کنید h یک نیم‌صفحه باشد. خط مرزی h با ℓ_h نمایش داده می‌شود. فرض کنید p نقطه‌ای در S و R_p خطی باشد که موازی محور xهاست و از نقطه p می‌گذرد. فرض کنید h_p و h'_p دو نیم‌صفحه باشند که خطوط مرزی‌شان R_p است و به ترتیب همه نقاط بالای خط R_p و همه نقاط پایین خط R_p را پوشش می‌دهند (شکل (۲) را ببینید).



شکل (۲). نیم‌صفحه‌های h_p و h'_p.

در ادامه، الگوریتم معروف مسیر- *حریصانه* که جهت ساخت t-پوشاننده برای مجموعه S به کار می‌رود، ارائه می‌شود. این الگوریتم، ابتدا همه زوج نقاط را بر اساس فاصله اقلیدسی به‌صورت غیرنزولی مرتب می‌کند و حاصل مرتب‌سازی را در فهرستی مانند L ذخیره می‌کند. این الگوریتم، اعضای L را به ترتیب پردازش می‌کند. فرض کنید که الگوریتم می‌خواهد زوج (p,q) را پردازش کند. اگر هیچ t-مسیری بین p و q در گرافی که تاکنون ساخته شده است، وجود نداشته باشد، آنگاه یال (p,q) به گراف اضافه می‌شود، در غیر این صورت، الگوریتم زوج نقطه بعدی را پردازش می‌کند. برای جزئیات بیشتر، الگوریتم (۱) را ببینید.

الگوریتم (۱). الگوریتم مسیر- حریصانه

Algorithm 1: PATHGREEDY(S,t)

input: A point set $S \subseteq \mathbb{R}^d$ with n points and a real number $t > 1$.
output: A t-spanner $G(S,E)$.
Sort all pairs of points in nondecreasing order of their Euclidean distances (ties are broken arbitrarily). A list L contains all sorted pairs;
$E \coloneqq \emptyset$;
$G \coloneqq (S,E)$;
foreach pair $(u,v) \in L$(in sorted order) **do**
  if SHORTESTDISTANCE$(G,u,v) > t \cdot |uv|$ then
    $E \coloneqq E \cup \{(u,v)\}$;
  end
end
return $G(S,E)$;

خروجی الگوریتم (۱) *پوشاننده حریصانه* نامیده می‌شود. در مقاله [۹] بوز و همکارانش یک الگوریتم جهت محاسبه پوشاننده حریصانه ارائه کردند که زمان اجرای آن $O(n^2 \log n)$ است.

لازم به ذکر است که الگوریتم (۱) با یک مجموعه یالی $E = \emptyset$ شروع می‌شود. در ادامه، الگوریتمی ارائه شده است که شبیه الگوریتم (۱) است فقط با این تغییر که شرط $E = \emptyset$ در آن حذف شده است و در عوض، الگوریتم یک گراف هندسی $G = (S,E)$ را به‌عنوان ورودی می‌گیرد. شبیه الگوریتم (۱)، خروجی الگوریتم (۲) یک t-پوشاننده برای S است و زمان اجرای آن $O(n^2 \log n)$ است.

۳- الگوریتم اصلی

۳-۱- الگوریتم و پیچیدگی

در این بخش، مسئله ساخت پوشاننده هندسی تحمل‌پذیر $\mathcal{D}_k$-خطا برای مجموعه نقطه S با $k = 1$ موردبررسی قرار می‌گیرد. بدون از دست دادن کلیت، فرض می‌شود که $\mathcal{D}_1$ خانواده همه نیم‌صفحاتی باشد که خط مرزی‌شان موازی محور xها است. فرض کنید که $t > 1$ یک عدد حقیقی باشد.

الگوریتم (۲). الگوریتم جدید مسیر- حریصانه

Algorithm 2: NEWPATHGREEDY(S,G,t)

input: A point set $S \subseteq \mathbb{R}^d$ with n points and a real number $t > 1$.
output: A t-spanner $G(S,E)$.
Sort all pairs of points in nondecreasing order of their Euclidean distances (ties are broken arbitrarily). A list L contains all sorted pairs;
foreach pair $(u,v) \in L$(in sorted order) **do**
  if SHORTESTDISTANCE$(G,u,v) > t \cdot |uv|$ then
    $E \coloneqq E \cup \{(u,v)\}$;
  end
end
return $G(S,E)$;

در ادامه، یک الگوریتم حریصانه که یک t-پوشاننده تحمل‌پذیر $\mathcal{D}_1$- خطا به نام G برای S می‌سازد، ارائه می‌شود. ایده‌ای که پشت این الگوریتم است در ادامه بیان می‌شود. فرض کنید که E مجموعه یال‌های G باشد. الگوریتم با $E = \emptyset$ شروع می‌شود. در ابتدا، الگوریتم همه نقاط S را بر اساس مختص y به‌صورت غیرصعودی مرتب می‌کند. فرض کنید که Y لیست مرتب‌شده این نقاط باشد. همچنین، الگوریتم همه نقاط S را بر اساس مختص y به‌صورت غیرنزولی مرتب می‌کند. فرض کنید که Y' لیست مرتب‌شده این نقاط باشد. برای دو مجموعه Y و Y'، به ترتیب گراف‌های هندسی G_1 و G_2 محاسبه می‌شوند. گراف نهایی G اجتماع دو گراف G_1 و G_2 است. برای ساخت گراف G_1، الگوریتم اعضای Y را به ترتیب پردازش می‌کند. به ازای یک نقطه $p \in Y$، الگوریتم NEWPATHGREEDY$(S_p, G_1 \ominus h_p, t)$ فراخوانی می‌شود. فرض کنید که G_p خروجی NEWPATHGREEDY$(S_p, G_1 \ominus h_p, t)$ باشد. سپس، الگوریتم یال‌های G_p را به گراف G_1 که تاکنون

ساخته شده است، اضافه می‌کند. مشابه ساخت گراف G_1، با استفاده از مجموعه Y'، گراف G_2 ساخته می‌شود. برای جزئیات بیشتر، الگوریتم (۳) را ببینید.

شکل (۳)، خروجی الگوریتم (۳) را برای یک مجموعه نقطه نشان می‌دهد.

حال، قضیه زیر ثابت می‌شود.

قضیه ۳. ۱. خروجی G(S, E) حاصل از الگوریتم (۳) یک t-پوشاننده تحمل‌پذیر $\mathcal{D}_1$-خطا برای مجموعه S است.

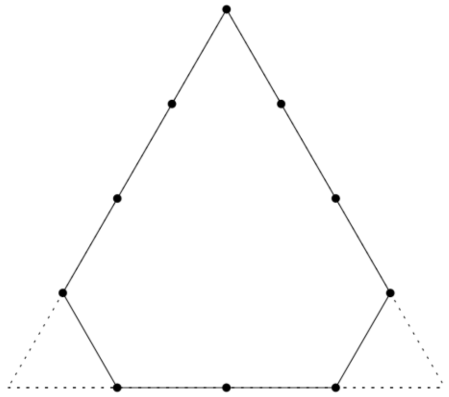
اثبات. فرض کنید h یک نیم‌صفحه در $\mathcal{D}_1$ باشد. بنابراین، خط مرزی h موازی محور xها است. بدون از دست دادن کلیت، فرض کنید که h همه نقاط زیر خط مرزی ℓ_h را پوشش می‌دهد. جهت اثبات قضیه، کافی است ثابت شود که برای هر زوج نقطه $\{p,q\}$ در بین نقاط S خارج از h، یک t-مسیر Q بین p و q با طول حداکثر t برابر $|pq|$ وجود دارد که p را به q در $G \ominus h$ متصل می‌کند.

اگر $\{p,q\}$ یک یال در $G \ominus h$ باشد، آنگاه حکم ثابت است. حال، فرض کنید که $\{p,q\}$ یالی در $G \ominus h$ نیست. بدون از دست دادن کلیت، فرض کنید که $p_y \le q_y$. حال، لحظه‌ای از الگوریتم را در نظر بگیرید که گراف G_p در خط ۱۰ ساخته می‌شود. بنابراین، ازآنجایی‌که $p_y \le q_y$، به‌وضوح یک t-مسیر Q بین p و q در G_p وجود دارد. ازآنجایی‌که نقاط S_p خارج از h قرار دارند، مسیر Q خارج از h قرار دارد و در نتیجه ازآنجایی‌که G شامل G_p است، بنابراین Q در $G \ominus h$ قرار می‌گیرد. پس حکم ثابت است.

الگوریتم (۳). الگوریتم اصلی

Algorithm 3: HALF-PLANE-GREEDY(S, t)

```
1.  Sort all points of S according to their y-coordinates in
    non-increasing order, and store them in the list Y;
2.  Sort all points of S according to their y-coordinates in
    nondecreasing order, and store them in the list Y';
3.  E := ∅;
4.  G := (S, E);
5.  E_1 := ∅;
6.  G_1 := (S, E_1);
7.  E_2 := ∅;
8.  G_2 := (S, E_2);
9.  foreach p ∈ Y and q ∈ Y' do
     /* in sorted order */
10.     G_p := NewPathGreedy(S_p, G_1 ⊖ h_p, t);
11.     G'_q := NewPathGreedy(S'_q, G_2 ⊖ h'_q, t);
12.     G_1 := G_1 ∪ G_p;
13.     G_2 := G_2 ∪ G'_q;
14. end
15. G := G_1 ∪ G_2;
16. return G;
```



شکل (۳). خروجی الگوریتم (۳) روی یک مجموعه نقطه به ازای $t = 2$. نقاط روی اضلاع یک مثلث متساوی‌الاضلاع به‌طور مساوی توزیع شده‌اند. یال‌های گراف خروجی با خطوط توپر مشخص شده‌اند.

قضیه ۳. ۲. گراف $G(S,E)$ حاصل از الگوریتم (۳) در زمان $O(n^3 \log n)$ ساخته می‌شود.

اثبات. فرض کنید $T(n)$ کل زمان اجرای محاسبه گراف G باشد. هر یک از خطوط ۱ و ۲ به $O(n \log n)$ زمان نیاز دارند. فرض کنید n_p و n'_p به ترتیب اندازه مجموعه‌های S_p و S'_p باشند. برای یک نقطه p، خطوط ۱۰ و ۱۱ به ترتیب به $O(n_p^2 \log n_p)$ و $O\left(\left(n'_p\right)^2 \log n'_p\right)$ زمان نیاز دارند؛ بنابراین، به‌سادگی می‌توان پی برد که کل زمان اجرای $T(n)$ به‌صورت زیر است:

$$T(n) = O(n \log n) + O(n \log n) + \sum_{p \in Y} O(n_p^2 \log n_p) + \sum_{p \in Y'} O\left(\left(n'_p\right)^2 \log n'_p\right).$$

با انجام یکسری محاسبات جبری ساده، داریم $T(n) = O(n^3 \log n)$. بنابراین، حکم ثابت است.

۳-۲- اندازه پوشاننده

در اینجا، نشان داده می‌شود که اندازه گراف G محاسبه‌شده در الگوریتم (۳) خطی است. جهت تحلیل اندازه گراف G، خصوصیات *تجزیه زوجی خوش-مجزا* (WSPD) *مورداستفاده* قرار می‌گیرد که این نوع تجزیه توسط کالاهان و کاساراجو [۶] به‌عنوان یک ساختار داده جهت حل کارای مسائل مجاورتی معرفی شد. فرض کنید که $S \subseteq \mathbb{R}^d$ مجموعه‌ای از نقاط باشد. فرض کنید $s > 0$ یک عدد حقیقی باشد. دو مجموعه غیر تهی $A, B \subseteq S$ را s-خوش-مجزا گویند هرگاه دو توپ C_A و C_B با شعاع‌های یکسان وجود داشته باشند به‌طوری‌که C_A و C_B به ترتیب A و B را در بربگیرند، و کوتاه‌ترین فاصله بین C_A و C_B حداقل s برابر شعاع C_B باشد. یک WSPD برای مجموعه نقطه S با *نرخ تجزیه* s، یک مجموعه به‌صورت $\{(A_1,B_1), \dots, (A_m,B_m)\}$

است به‌طوری‌که به ازای هر عدد صحیح i با شرط $1 \le i \le m$، دو مجموعه A_i و B_i s-مجزا باشند و به ازای هر دو نقطه $p, q \in S$ که $p \neq q$، دقیقاً یک عدد صحیح i وجود دارد که $p \in A_i$ و $q \in B_i$ یا $q \in A_i$ و $p \in B_i$. در اینجا به عدد صحیح m اندازه WSPD گفته می‌شود. کالاهان و کاساراجو [۶] نشان دادند که برای هر مجموعه نقطه S شامل n نقطه در $\mathbb{R}^d$، یک WSPD با اندازه $m = O(s^d n)$ وجود دارد که می‌توان آن را در زمان $O(n \log n + s^d n)$ محاسبه کرد. کاربردهای زیادی از WSPD تاکنون ارائه شده است ([۴، ۵، ۶، ۱۰]).

حال، لم زیر ارائه می‌شود:

لم ۳. ۳ ([۸]). فرض کنید $s > 0$ یک عدد حقیقی باشد. فرض کنید A و B دو مجموعه متناهی از نقاط باشند که s-خوش- مجزا هستند. فرض کنید p و p' دو نقطه در A باشند و q و q' دو نقطه در B باشند؛ بنابراین:

$$|pp'| \le \frac{2}{s}|pq| \tag{۱}$$

$$|p'q'| \le \left(1 + \frac{4}{s}\right)|pq| \tag{۲}$$

فرض کنید $\mathcal{W}$ یک WSPD برای مجموعه نقطه S با نرخ تجزیه $s = \frac{4(t+1)}{t-1}$ باشد. فرض کنید H یک گراف هندسی با مجموعه رئوس S باشد و (A, B) یک عضو در $\mathcal{W}$ باشد. حال، لم زیر ارائه می‌شود.

لم ۳. ۴ ([۸]). فرض کنید $a_1, a_2 \in A$ و $b_1, b_2 \in B$. فرض کنید P_1 یک t- مسیر بین a_1 و a_2 باشد و P_2 یک t- مسیر بین b_1 و b_2 باشد. اگر H یال (a_1, b_1) را دارا باشد، بنابراین مسیر به‌دست‌آمده از الحاق مسیر P_1، یال (a_1, b_1) و مسیر P_2 یک t- مسیر بین a_2 و b_2 در H است.

حال، لم زیر اثبات می‌شود.

لم. ۳. ۵. فرض کنید A و B دو زیرمجموعه از S باشند که به ازای $s = \frac{4(t+1)}{t-1}$ هر دو s–خوش–مجزا هستند. هر یک از گراف‌های هندسی $G_1 = (S, E_1)$ و $G_2 = (S, E_2)$ که توسط الگوریتم ۳ محاسبه می‌شوند شامل حداکثر یک یال بین A و B است.

اثبات. در اینجا، لم برای گراف G_1 ثابت می‌شود. اثبات لم برای گراف G_2 نیز به‌طور مشابه انجام می‌شود. اثبات از طریق برهان خلف است. فرض کنید که گراف G_1 شامل حداقل دو یال (a, b) و (c, d) است به‌طوری‌که $a, c \in A$ و $b, d \in B$. فرض کنید p یک نقطه در S با بیشترین مقدار مختص y باشد به‌طوری‌که G_p یال (a, b) را در بربگیرد. همچنین، فرض کنید q یک نقطه در S با بیشترین مقدار مختص y باشد به‌طوری‌که G_q یال (c, d) را در بربگیرد. بدون از دست دادن کلیت، فرض کنید که $p_y \le q_y$. لازم به ذکر است که $p_y \le a_y, b_y$ و $q_y \le c_y, d_y$. بر طبق خط ۹ الگوریتم (۳)، نقطه p بعد از نقطه q پردازش می‌شود. از آنجایی که G_q شامل یال (c, d) است و $p_y \le q_y \le c_y, d_y$، بنابراین $G_1 \ominus h_p$ شامل یال (c, d) است. از آنجایی که $s > 4$ طبق لم ۳. ۳ داریم $|ac| < |ab|, |cd|$ و $|bd| < |ab|, |cd|$. ازاین‌رو، با بکار بردن استقراء روی رتبه فاصله اقلیدسی زوج نقاط، به‌راحتی می‌توان پی برد که یک t- مسیر بین a و c و یک t- مسیر بین b و d در $G_1 \ominus h_p$ وجود دارد. بنابراین، طبق لم ۳. ۴، یک t- مسیر بین a و b در $G_1 \ominus h_p$ وجود دارد. ازاین‌رو، یال (a, b) به G_p اضافه نمی‌شود که این یک تناقض است. بنابراین فرض خلف باطل و حکم ثابت است.

حال، فرض کنید $\mathcal{W}$ یک WSPD برای مجموعه نقطه S با نرخ تجزیه $s = \frac{4(t+1)}{t-1}$ و شامل $O(s^d n)$ زوج باشد. بر اساس لم ۳. ۵، هر یک از گراف‌های هندسی G_1 و G_2 ساخته شده توسط الگوریتم (۳) شامل $O(s^d n)$ یال است. ازاین‌رو، گراف G شامل $O(s^d n)$ یال است. بنابراین، با استفاده از قضیه ۳. ۲، قضیه زیر حاصل می‌شود.

قضیه ۳. ۶. فرض کنید S مجموعه‌ای از n نقطه در $\mathbb{R}^d$ و $t > 1$ یک عدد حقیقی باشد. یک t- پوشاننده تحمل‌پذیر $\mathcal{D}_1$- خطا برای S با اندازه خطی را می‌توان در زمان $O(n^3 \log n)$ ساخت.

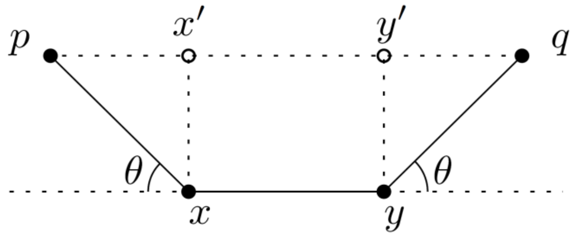
به‌طورکلی، فرض کنید که $\mathcal{D}_1$ خانواده تمام نیم‌صفحاتی باشد که خطوط مرزی آن‌ها موازی یک خط ثابت در $\mathbb{R}^2$ باشد (در بالا فرض شده بود که $\mathcal{D}_1$ خانواده تمام نیم‌صفحاتی باشد که خطوط مرزی آن‌ها موازی محور xها است). با اعمال تعدادی اصلاحات ساده روی الگوریتم (۳)، به‌سادگی نتایج مشابهی برای $\mathcal{D}_1$ به دست آورده می‌شود.

برای ساخت یک t-پوشاننده هندسی تحمل‌پذیر $\mathcal{D}_k$-خطا به ازای $k > 1$، کافی است که الگوریتم (۳) k بار اجرا شود. بنابراین، با توجه به قضیه ۳. ۶، تعداد یال‌ها و زمان ساخت گراف تولیدی به ترتیب برابر $O(kn)$ و $O(kn^3 \log n)$ خواهد بود. ازاین‌رو، نتیجه زیر حاصل می‌شود.

قضیه ۳. ۷. فرض کنید S مجموعه‌ای از n نقطه در $\mathbb{R}^d$ و $t > 1$ یک عدد حقیقی باشد. یک t-پوشاننده تحمل‌پذیر $\mathcal{D}_k$- خطا برای S با $O(kn)$ یال را می‌توان در زمان $O(kn^3 \log n)$ ساخت.

۴- ملاحظات پایانی

در اینجا، نشان داده می‌شود که پوشاننده مسیر–حریصانه اصلی ضرورتاً یک t-پوشاننده تحمل‌پذیر $\mathcal{D}_1$-خطا نیست. بدون از دست دادن کلیت فرض کنید که $\mathcal{D}_1$ خانواده همه نیم صفحاتی باشد که خطوط مرزی‌شان موازی محور xها است. فرض کنید که P مجموعه‌ای شامل چهار نقطه p, q, x و y باشد که در شکل (۴) مشاهده می‌شود.



شکل (۴). مجموعه نقطه P

فرض کنید که $|px| = |xy| = |qy| = 1$. فرض کنید که $0 < \theta \le \frac{\pi}{2}$ زاویه تشکیل‌شده بین پاره‌خط qy و محور xها باشد. فرض می‌کنیم که زاویه بین پاره‌خط px و جهت منفی محور xها برابر با θ است. فرض کنید که x' و y' به ترتیب تصویر عمود نقاط x و y باشند. بنابراین، داریم $|px'| = |px|\cos\theta$ و $|qy'| = |py|\cos\theta$. از آنجایی که $|px| = |qy| = 1$، پس داریم $|px'| = |qy'| = \cos\theta$ و در نتیجه $|pq| = 1 + 2\cos\theta$. از آنجایی که مثلث‌های $\Delta\, pxy$ و $\Delta\, qyx$ متساوی الساقین هستند، داریم $|py| = |qx| = 2\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right) = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

الگوریتم مسیر- حریصانه (الگوریتم (۱)) یال‌های (p,x)، (x,y) و (q,y) را به خاطر اینکه نزدیک زوج نقاط هستند را به مجموعه یال‌ها اضافه می‌کند. فرض کنید $t > 1$ یک عدد حقیقی باشد به طوری که $t \ge \frac{3}{1+2\cos\theta}$. با انجام یکسری محاسبات جبری ساده، می‌توان نشان داد که $\frac{3}{1+2\cos\theta} \ge \frac{1}{\cos\frac{\theta}{2}}$. از اینرو، $t \ge \frac{1}{\cos\frac{\theta}{2}}$. فرض کنید که $O := (p,x) \cup (x,y)$ مسیر بین p و y در گرافی که تاکنون توسط الگوریتم محاسبه شده است، باشد. بنابراین، داریم $\frac{|O|}{|py|} = \frac{2}{2\cos\frac{\theta}{2}}$. از آنجایی که $t \ge \frac{1}{\cos\frac{\theta}{2}}$؛ بنابراین مسیر O یک t- مسیر بین p و y است. در نتیجه، الگوریتم یال (p,y) را به مجموعه یالی اضافه نمی‌کند. با استدلال‌های مشابه، می‌توان نشان داد که الگوریتم یال (q,x) را نیز به مجموعه یالی اضافه نمی‌کند. حال، فرض کنید که $Q := (p,x) \cup (x,y) \cup (y,q)$ مسیری بین p و q در گرافی که تاکنون محاسبه شده است، باشد. بنابراین $\frac{|Q|}{|pq|} = \frac{3}{1+2\cos\theta}$. از آنجایی که $t \ge \frac{3}{1+2\cos\theta}$، به وضوح Q یک t-مسیر بین p و q در گراف محاسبه شده است. از این رو، الگوریتم یال (p,q) را به گراف اضافه نمی‌کند؛ بنابراین، پوشاننده مسیر–حریصانه G روی مجموعه نقطه P فقط شامل سه یال $(p,x), (x,y)$ و (q,y) است. حال، فرض کنید که $h \in \mathcal{D}_1$ یک نیم صفحه باشد که خط مرزی آن با ℓ_h نمایش داده می‌شود. فرض کنید که ℓ_h پاره‌خط px را قطع کند (به‌جز در نقاط انتهایی). واضح است که گراف $G \ominus h$ یک t-پوشاننده نیست. توجه کنید که به ازای هر عدد حقیقی $t > 1$، یک عدد حقیقی $0 < \theta \le \frac{\pi}{2}$ وجود دارد به طوری که $t \ge \frac{3}{1+2\cos\theta}$.

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله، یک الگوریتم ارائه شد که یک t- پوشاننده تحمل‌پذیر $\mathcal{D}_k$- خطا برای یک مجموعه نقطه داده‌شده با $O(kn)$ یال و در زمان $O(kn^3\log n)$ می‌سازد. سؤال بازی که در اینجا مطرح می‌شود این است که آیا ممکن است یک t- پوشاننده تحمل‌پذیر $\mathcal{D}_k$- خطا با اندازه خطی در زمان $o(n^3\log n)$ ساخت؟

۶- مراجع

[1] A. B. Dehkordi, M. R. Soltanaghaie, F. Z. Boroujeni, "Distributed Denial of Service Attacks Detection in Software Defined Networks," Jourrnal of Electronical & Cyber Defence, vol. 9, no. 1, pp. 43-59, 2021. (In Persian)

[2] K. Shoshian, A. Mirghadri, "Modeling of Obfuscated Multi- Stage cyber Attacks," Jourrnal of Electronical & Cyber Defence, vol. 8, no. 2, pp. 61-73, 2020. (In Persian)

[3] M. A. Abam, M. de Berg, M. Farshi, and J. Gudmundsson, "Region-fault tolerant geometric spanners," Discrete. Comput. Geom., vol. 41, no. 4, pp. 556-582, 2009.

[4] S. Arya, D. M. Mount, and M. Smid, "Randomized and deterministic algorithms for geometric spanners of small diameter," 35th Annual Symposium on Foundations of Computer Science, 1994.

[5] P. B. Callahan and S. R. Kosaraju, "Faster algorithms for some geometric graph problems in higher dimensions," fourth annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, 1993.

[6] P. B. Callahan and S. R. Kosaraju, "A decomposition of multidimensional point sets with applications to k-nearest-neighbors and n-body potential fields," J. ACM., vol. 42, no. 1, pp. 67-90, 1995.

[7] D. Bakhshesh, L. Barba, P. Bose, J.-L. De Carufel, M. Damian, R. Fagerberg, M. Farshi, A. van Renssen, P. Taslakian, and S. Verdonschot, "Continuous Yao graphs," Comp. Geom-Theor. Appl., vol. 67, pp. 42-52, 2018.

[8] D. Bakhshesh and M. Farshi, "Fault tolerancy of continuous Yao graph of angle less than $2\pi/5$," Inform. Process. Lett., vol. 148, pp. 13-18, 2019.

[9] P. Bose, P. Carmi, M. Farshi, A. Maheshwari, and M. H. M. Smid, "Computing the greedy spanner in near-quadratic time," Algorithmica, vol. 58, no. 3, pp. 711-729, 2010.

[10] G. Narasimhan and M. Smid, "Geometric spanner networks", Cambridge University, 2007.