نشریه علمی "پدافند الکترونیکی و سایبری"
سال هشتم، شماره ۳، پاییز ۱۳۹۹، ص ۱۷۰-۱۶۷

گراف‌های دوری صحیح چند بخشی

غلامرضا صفاکیش همدانی[1*] ، ژیلا عباسی[2]

۱- استادیار، گروه ریاضی، ۲- فارغ التحصیل کارشناسی ارشد دانشکده علوم، گروه ریاضی، دانشگاه بوعلی سینا همدان

(دریافت: ۱۳۹۹/۰۳/۲۷ پذیرش: ۱۳۹۹/۰۵/۱۵)

چکیده

در این مقاله، گراف‌های دوری صحیح چند بخشی ICG (n, D) از مرتبه دلخواه n، که n عدد صحیح مثبتی است را مشخص می‌شود. در اینجا ICG (n, D) گرافی است که رئوس آن اعضای گروه $\mathbf{Z_n}$ است و یال‌های آن مجموعه $\{\{\mathbf{a}\,,\mathbf{b}\}: \mathbf{a}\,,\mathbf{b}\ \in\ \mathbf{Z_n}\,,\ \mathbf{gcd}(\mathbf{a}-\mathbf{b}\,,\mathbf{n}) \in \mathbf{D}\}$ می‌باشد و D مجموعه‌ای از مقسوم علیه‌های مثبت عدد صحیح n است. این دسته از گراف‌ها را به دلیل فرم مجموعه یال‌های آن، گراف‌های ب.م.م نامیده می‌شود. گراف دوبخشی G گرافی است که مجموعه رئوس آن را بتوان به دو زیرمجموعه X,Y طوری افراز کرد که هیچ دو رأسی در X و هیچ دو رأسی در Y مجاور نباشند. گراف دوبخشی را کامل گفته می‌شود هرگاه هر رأس در X، به تمام رئوس Y متصل باشد. این گراف را با $\mathbf{K_{m,n}}$ نمایش داده می‌شود اگر $|\mathbf{X}| = \mathbf{m}$ و $|\mathbf{Y}| = \mathbf{n}$. گراف‌های چند بخشی، نیز مانند گراف دوبخشی تعریف می‌شوند.

کلیدواژه‌ها: گراف کیلی، گراف صحیح، گراف دوری، گراف چند بخشی

۱- مقدمه

با عمومی شدن استفاده از شبکه‌های اجتماعی آنلاین، بحث حفاظت از داده‌ها و حفاظت اطلاعات شخصی اعضای حاضر در گروه‌های اجتماعی در حال افزایش است و به یک مسئله اساسی تبدیل شده است. ارتباط نزدیک مدل کاربران و گراف‌ها که هر شخص را به‌عنوان یک رأس و ارتباط هر دو نفر را به‌عنوان یال مدل‌سازی می‌کند باعث اهمیت بیش از پیش گراف‌ها در شبکه‌های اجتماعی می‌شود. همچنین گراف‌ها برای تجزیه و تحلیل ساختار شبکه‌های اجتماعی، ایجاد روش‌هایی برای حفظ حریم خصوصی و برقرای تعادل بین امنیت شبکه و میزان اطلاعات از دست رفته و گمنام سازی در شبکه‌های اجتماعی برای حفظ حریم خصوصی کاربرد مؤثری دارند.

در سال ۲۰۰۷ کلوتز[1] و تی ساندر[2] با توسیع مفهوم گراف کیلی یکه، گراف ب.م.م را با مجموعه رئوس $\mathbf{Z_n}$ و مجموعه یال‌های $\{\{a\,,b\}: a\,,b\ \in\ Z_n, \gcd(a-b\,,n) \in D\}$، تعریف کردند. سو[3] در سال ۲۰۰۵ نشان داد که هر گراف دوری صحیح با یک گراف ب.م.م، متناظر است.

گراف G را صحیح گفته می‌شود، هر گاه مقادیر ویژه ماتریس مجاورت آن، A(G) صحیح باشد به عبارتی تمام مقادیر ویژه، صحیح باشد. به‌عنوان مثال گراف کامل K_n با طیف (1- ,… ,1- ,n-1)، یک گراف صحیح است. گراف G را دوری گویند هر گاه A(G) دوری باشد.

در مراجع [۳-۱] یک دیدگاه دوری بودن به بررسی گراف‌ها پرداخته شده و در مراجع [۸-۴] از منظر انرژی گراف‌ها بررسی شده‌اند.

ساختار این مقاله بر اساس گراف‌های دو بخشی و چند بخشی استوار است که امروزه در شبکه‌های اجتماعی گراف‌های چند بخشی را به‌عنوان گروه‌های فاقد اشتراک در شبکه‌های مجازی می‌توان در نظر گرفت.

۲- گراف‌های کیلی

گراف‌های کیلی اولین بار توسط آرتور کیلی[4] مطرح شد. این گراف‌ها در واقع نمایش شهودی ساختار یک گروه هستند و به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

تعریف ۲-۱: فرض کنید G گروهی با عضو همانی ۱ باشد و زیرمجموعه $S \subseteq G$ را در نظر بگیرید که $1 \notin S$ و در ضمن S نسبت به وارون‌گیری بسته باشد، در این صورت گراف کیلی X=Cay (G,S)

گرافی است که مجموعه رئوس آن V(X) = G و مجموعه یال‌های آن: $E(X) = \left\{\{\mathbf{a},\mathbf{b}\}: \mathbf{a}\,\mathbf{b}^{-1}\ \in\ S\right\}$ باشد.

گراف‌های ب.م.م دسته‌ای خاص از گراف‌های کیلی هستند که به‌ازای $\mathbf{G} = \mathbf{Z_n}$ و زیرمجموعه:

* رایانامه نویسنده مسئول: safakish@basu.ac.ir

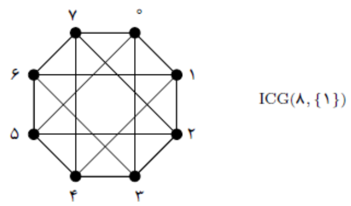
[1] W. Klotz
[2] T. Sander
[3] W. So
[4] A. Cayley

$S = \{x: x \in \mathbf{Z_n}, \gcd(x, n) \in D\}$

به‌دست می‌آیند. توجه داشته باشید که گراف ICG (n,D) در حالتی که $n \in D$، طوقه دارد، از این‌رو، فرض می‌شود:

$D \subseteq D^*(n) := \{d > 0: d|n, d < n\}$

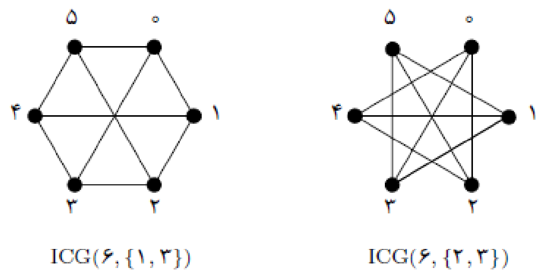
مثال ۲-۲: گراف‌های ICG (8,{1}) در شکل (۱) و گراف‌های ICG (6,{1,3}) و ICG (6,{2,3}) در شکل (۲) رسم شده‌اند:



شکل (۱): ساختار گراف ICG (8,{1}).

قضیه ۲-۳: گراف ICG (n,D) منظم از درجه $\sum_{d\in D} \varphi(\frac{n}{d})$ است که در آن، φ تابع اویلر است.

برهان: رجوع شود به [۲].



شکل (۲): گراف‌های ICG **(۶،{۲،۳})** و ICG **(۶،{۱،۳})** .

قضیه ۲-۴: مقادیر ویژه گراف ICG (n,D) به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\lambda_k(n, D) = \sum_{d\in D} \mu\left(\frac{n}{\gcd(kd, n)}\right) \frac{\varphi(^n/_d)}{\varphi\left(\frac{n}{\gcd(kd, n)}\right)}$$

که در آن، φ و μ به‌ترتیب توابع اویلر و موبیوس می‌باشند.

برهان. به مرجع [۹] و نیز مطالب مراجع [۴ و ۱۰] مراجعه شود.

قضیه ۲-۵: گراف ICG (n,D) که $D = \{d_1, \dots, d_r\}$، همبند است اگر و تنها اگر:

$\gcd(n, d_1, \dots, d_r) = 1.$

برهان: می‌دانید که ICG (n,D) گراف کیلی است که در آن:

$\mathbf{S = \{x : \gcd(x, n) \in D\}}$.

گراف همبند است اگر و تنها اگر مجموعه S مولد گروه G باشد؛ از طرفی می‌دانید که مجموعه $\langle \mathbf{m} \rangle$ مولد $\mathbf{Z_n}$ است اگر و تنها اگر gcd (m,n)=۱ . در نتیجه S مولد $\mathbf{Z_n}$ است اگر و تنها اگر اعضای S نسبت به n اول باشند که معادل با تساوی $\mathbf{\gcd(n, d_1, \dots, d_r) = 1}$ است.

تعریف ۲-۶: فرض کنید G گرافی دوری با ماتریس مجاورت $\mathbf{A(G) = [a_{ij}]}$ و مجموعه رئوس {0, …, n-1} باشد. نماد یا مجموعه دوری گراف G را با S(G) نمایش داده و به‌صورت $\mathbf{S(G) = \{k: a_{0,k} = 1\}}$ تعریف می‌شود.

حال بررسی می‌شود که گراف ICG (n,D) در صورتی که همبند نباشد به چه صورت خواهد بود. در اثبات قضیه زیر از این نکته استفاده می‌شود که مؤلفه‌های همبندی در گراف‌های کیلی، یکریخت هستند.

قضیه ۲-۷: گراف ICG (n,D) برابر اجتماعی از گراف‌های کامل است اگر و تنها اگر n =ct و

$\mathbf{D = \{rc : r \geq 1 , rc |n\}}.$

برهان. اگر n=ct و $\mathbf{D = \{rc : r \geq 1 , rc |n\}}$، آنگاه :

$\mathbf{S(G) = \{x : \gcd(x, n) \in D\} = \{c, 2\,c, \dots, ct\}}$

مشاهده می‌شود که $\mathbf{|S(G)| = t}$ و هر دو عضو از S(G) مجاورند. بنابراین، زیرگراف شامل رأس ۰ گرافی کامل است؛ چون ICG (n,D) گرافی منتظم است، در نتیجه سایر مؤلفه‌های همبندی هم زیرگرافی کامل هستند.

برعکس فرض کنید ICG (n,D) و H مؤلفه شامل رأس ۰ باشد که $\mathbf{D = \{d_1, \dots, d_l\}}$ و $\mathbf{d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_l}$. چون H گراف کامل است، صفر به تمام $\mathbf{d_i}$ها در H متصل است. از این رو، تمام $\mathbf{d_i}$ ها رأسی از H هستند. از طرفی $\mathbf{d_2 \sim d_1}$، بنابراین:

$\mathbf{\gcd(d_2 - d_1, n) \in D}$. چون $\mathbf{d_2 - d_1 < d_2}$، لازم است که $\mathbf{\gcd(d_2 - d_1) = d_1}$ و در نتیجه $\mathbf{d_1 |\, d_2}$. مشابهاً

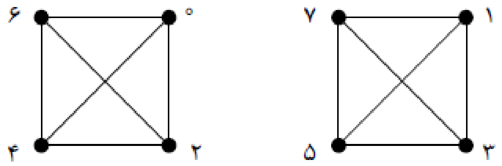
$\mathbf{\gcd(d_3 - d_2, n)}$ که لازم است

$$\mathbf{\gcd(d_3 - d_2, n) \in \{d_1, d_2\}} .$$

که در هر صورت نتیجه می‌دهد $\mathbf{d_1 |\, d_3}$. به‌طور مشابه و با ادامه این روند دیده می‌شود که $\mathbf{d_1 |\, d_i}$ برای $\mathbf{1 \leq i \leq l}$. حال نشان داده می‌شود تمام مضارب $\mathbf{d_1}$ که n را عاد می‌کنند، به D تعلق دارند. به برهان فرض کنید $\mathbf{ad_1}$ کوچک‌ترین عددی باشد که $\mathbf{n}$ $\mathbf{d_1|}$ و $\mathbf{d_1 \notin D.}$ در این صورت $\mathbf{\gcd(ad_1 - d_1, n) = kd_1}$ که $\mathbf{1 \leq k \leq a - 1}$. بنابر انتخاب a، لازم است که $\mathbf{kd_1 \in D}$ و این نتیجه می‌دهد که $\mathbf{ad_1 \sim d_1}$ و در نتیجه $\mathbf{ad_1 \in V(H)}$ و از آنجا $\mathbf{ad_1 \sim 0}$ و در نتیجه $\mathbf{ad_1 \in D}$ که تناقض است. بنابراین، $\mathbf{D = \{rd_1 : r \geq 1 , rd_1|n\}}$. همچنین دیده می‌شود که V(H) از

تمام مضارب $\mathbf{d_1}$ تشکیل شده است. در نتیجه $|\mathbf{V(H)}| = \mathbf{t}$ که $n = t\mathbf{d_1}$. چون گراف ICG (n,D) منتظم است، لازم است که سایر مؤلفه‌های H نیز گراف کامل K_t باشند.

مثال ۲-۸: به‌ازای n=۸ و D= {۲،۴} گراف ICG (n,D) در شکل (۳) اجتماع دو گراف کامل همچنین رأسی است:



شکل (۳): گراف‌هایی که اجتماعشان ICG (n,D) به‌ازای n=۸ و D= {۴،۲} است.

۳- گراف‌های دوری صحیح چند بخشی

قضیه ۳-۱: گراف ICG (n,D) دو بخشی است اگر و تنها اگر به ازای $\mathbf{k_0}$ ای که $\mathbf{1} \le \mathbf{k_0} < \mathbf{n}$، n زوج و $\frac{2\,k_0 d}{n}$ عددی فرد برای هر $\mathbf{d} \in \mathbf{D}$ باشد.

برهان: فرض کنید گراف چرخشی صحیح ICG (n,D) دو بخشی باشد. در این صورت با توجه به اینکه $\lambda_n = \sum_{d|n} \varphi(\frac{n}{d})$ بزرگ‌ترین مقدار ویژه است، از این رو، باید برای k ای داشته باشید. $\lambda_k = -\sum_{d|n} \varphi(\frac{n}{d})$، اما می‌دانید که:

$$\lambda_k(n, D) = \sum_{d \in D} \mu\left(\frac{n}{\gcd(n, kd)}\right) \cdot \frac{\varphi(n/d)}{\varphi\left(\frac{n}{\gcd(n, kd)}\right)} \,.$$

از این رو باید:

$$\mu\left(\frac{n}{\gcd(n,kd)}\right) = \pm 1 \qquad \forall d \in D.$$

بنابراین:

$$a = \frac{n}{\gcd(n, kd)} \in \{1\,, 2\}$$

اما $a \neq 1$، زیرا $\varphi(1) = \mu(1) \neq -1$ در نتیجه دارید:

$$:\frac{n}{\gcd(n,kd)} = 2 \;\Rightarrow \gcd(n\,, kd) = \frac{n}{2} \qquad \forall d \in D$$

که نشان می‌دهد باید n زوج باشد. از طرفی رابطه $\gcd\left(2\,, \frac{2\,kd}{n}\right) = 1$ نشان می‌دهد باید برای $\mathbf{d} \in \mathbf{D}$ فرد و مجموعه D تک عضوی باشد؛ زیرا اگر k=ab، به‌طوری که gcd (k,n)=a برای هر $\mathbf{d} \in \mathbf{D}$، دارید gcd(n,kd)=ad و در نتیجه $ad = \frac{n}{2}$ و از آنجا $d = \frac{an}{2}$. بنابراین، اگر $D=\{d_0\}$، آنگاه تعدادهایی که در شرط قضیه صدق می‌کنند برابر با مجموعه

$$A = \left\{l.\frac{n}{2\,d_0} : \gcd(l, n) = 1\,, l < 2\,d_0\right\}$$

است.

برعکس، فرض کنید برای $\mathbf{k_0}$، $\frac{2\,k_0\,d}{n}$ برای هر $d \in D$ فرد است. بنابراین:

$$\begin{aligned}
\lambda_{k_0} &= \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{\gcd(n, k_0 d)}\right) \cdot \frac{\varphi(n/d)}{\varphi\left(\frac{n}{\gcd(n, k_0 d)}\right)} \\
&= \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{\frac{n}{2}\gcd(2, \frac{2\,k_0\,d}{n})}\right) \frac{\varphi(n/d)}{\varphi\left(\frac{n}{\frac{n}{2}\gcd(2, \frac{2\,k_0\,d}{n})}\right)} \\
&= \sum_{d|n} \mu(2)\, \frac{\varphi(n/d)}{\varphi(2)} \\
&= -\sum_{d|n} \varphi(n/d)
\end{aligned}$$

درنتیجه، حکم ثابت می‌شود.

توجه کنید که در حالت کلی هر گراف ICG (n,D) به جز گراف کامل، می‌تواند گراف چند بخشی باشد. زیرا اگر:

$S(G) = \{a_1, \dots, a_k\}$ مجموعه رئوس مجاور صفر و $\overline{S(G)} = \{b_1, \dots, b_m\}$ مجموعه رئوس غیر مجاور با صفر باشند، آنگاه رأس صفر و رئوس $b_{i1}, \dots, b_{im} \in \overline{S(G)}$ را چنان در نظر گرفته می‌شود که هیچ دو رأسی با هم مجاور نباشند و از آنجا که گراف دوری و منتظم است، برای سایر رئوس، به جز $b_{i1}, \dots, b_{im}$ و صفر این روند را در نظر گرفته می‌شود. در این صورت توانسته‌اید مجموعه رئوس {0, 1, …, n-1} را به چند بخش افراز کنید.

قضیه ۳-۲: اگر گراف ICG (n,D) چند بخشی کامل باشد آنگاه n=rt و

$$D = \left\{\frac{n}{d_i} : \sum \varphi(\,d_i) = n - r\right\}$$

برهان: فرض کنید ICG (n,D) گراف چند بخشی کامل باشد و $X_1, \dots, X_t$، افرازهای مجموعه رئوس باشند. چون گراف چند بخشی منتظم است، بنابراین لازم است که $|X_1| = \cdots = |X_t|$ و بنابراین:

$$n = \sum_{i=1}^{t} |X_i| = t|X_i|$$

فرض کنید $|X_1| = r$ و $0 \in X_1$؛ چون گراف ICG (n,D) چند بخشی کامل است بنابراین رأس صفر با تمام t-1 رأس سایر افرازها، مجاور است. بنابراین:

$$|S(G)| = \sum_{i=2}^{t} |X_i| = (t-1)r$$

و $n - |S(G)| = r$ مجموعه D را چنان مساخته می‌شود که در شرط قضیه صدق کند. مجموعه A را به‌صورت تعریف می‌شود:

$$A = \varphi(D(n) \setminus \{1\}) : \{\varphi(d_i) : d_i \in D(n) \setminus \{1\}\}$$

حال اعضایی از مجموعه A را در نظر گرفته می‌شود که در شرط:
$\boldsymbol{n - |S(G)| = r}$
صدق کند و مجموعه D را چنین ساخته می‌شود:

$$\boldsymbol{D = \left\{\frac{n}{d_i} : \sum \varphi(d_i) = n - r\right\}}$$

در این صورت D مجموعه مطلوب است.

مثال ۳-۳: فرض کنید n=۱۸، در این صورت داریم:

$$\boldsymbol{\varphi(18) = 6,\ \ \varphi(9) = 6\ ,\ \ \varphi(6) = 2\ ,\ \ \ \varphi(3) = 2\ ,\ \ \varphi(2) = 1} \qquad (۱,۱)$$

اما با توجه به قضیه قبل چون باید $|X|$|۱۸ ، چند حالت زیر را داریم:

(۱) $\boldsymbol{|X| = 1}$. در این حالت $\boldsymbol{18 - |S(G)| = 1}$؛ یعنی گراف باید کامل باشد که در این صورت D = {۱،۲،۳،۶،۹} .

(۲) $\boldsymbol{|X| = 2}$. در این صورت باید با توجه به قضیه قبل،

(۳) $\boldsymbol{18 - |S(G)| = 2}$، اما با توجه به رابطه (۱,۱) دارید:
$$\boldsymbol{\varphi(18) + \varphi(9) + \varphi(6) + \varphi(3) = 16}$$
پس {۱،۲،۳} = $\boldsymbol{\left\{\frac{18}{18}, \frac{18}{9}, \frac{18}{6}, \frac{18}{3}\right\}}$.

$\boldsymbol{|X| = 3}$. دارید $\boldsymbol{|S(G)| = 15}$، بنابراین با توجه به رابطه (۱.۱) و قضیه قبل، باید داشته باشید {9 , 6 , 2 , 1} = D یا D = {1 , 2 , 3 , 9}.

(۴) $\boldsymbol{|X| = 6}$. آنگاه $\boldsymbol{|S(G)| = 12}$، بنابراین، باید D ={1 , 2}.

(۵) $\boldsymbol{|X| = 9}$. در این صورت $\boldsymbol{|S(G)| = 9}$، در نتیجه باید

D={1 , 6 , 9} یا D = {2 , 3 , 9}.

۴- نتیجه‌گیری

در این مقاله وضعیت گراف‌های دوری صحیح دو و چند بخشی بررسی شد و نتایج جدیدی در خصوص ویژگی‌های این گراف‌ها در شرایط مختلف با ارائه چند قضیه به‌دست آمد. در صورت علاقه‌مندی، خواننده می‌تواند این شرایط را برای گراف‌های چهار بخشی به بالا، مورد بررسی قرار دهد.

۵- مراجع

[1] Sergiy Koshkin, “The Asymptotic Trace Norm of Random Circulants and the Graph Energy,” [math.PR] 7 Oct 2016 pp1-25.

[2] W. So, “Integral Circulant Graphs,” Discrete Math., vol. 306, pp. 153–158, 2005.

[3] T. A. Le, J. W. Sander: “Convolutions of Ramanujan Sums and Integral Circulant Graphs,” Int. J. Number Theory, 8 (2012), 1777–1788.

[4] C. Godsil and G. Royal, “Algebraic Graph Theory,” Graduate Texts in Mathematics, vol. 207, Springer- Verlag, New York, 2001.

[5] N. Saxena, S. Severini, and I. E. Shparlinski, “Parameters of Integral Circulant Graphs and Periodic Quantum Dynamics,” Int. J. Quantum Inf., vol. 5, pp. 417–430, 2007.

[6] V. Nikiforov, “Beyond Graph Energy: Norms of Graphs and Matrices,” Linear Algebra and its Applications, 506 (2016), 82138.

[7] V. Nikiforov, “Remarks on the Energy of Regular Graphs,” Linear Algebra and its Applications, 508 (2016), 133–145.

[8] X. Li, Y. Shi, I. Gutman, “Graph Energy,” Springer, New York, 2012

[9] T. A. Le and J. W. Sander, “Extermal Energies of Integral Circulant Graphs via Multiplicativity,” Linear Algebra Appl. vol. 437, pp. 1408-1421, 2012.

[10] N. L. Biggs, “Algebraic Graph Theory,” Second Edition, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

Journal of Electronical & Cyber Defence
Vol. 8, No. 3, 2020, Serial No. 31

Multipartite Integral Circulant Graphs

G. R. Safakish Hamedani*, J. Abasi

*Department of Mathematics, Bu - Ali Sina University, Hamedan, P. O. Box 65178-38695, Iran

(Received: 16/06/2020, Accepted: 05/08/2020)

ABSTRACT

In this paper we specify the class of integral circulant graphs ICG(n;D), which can be characterized by their order n and the set D of positive divisors of n in such a way that they have the vertex set Zn and the edge set

$$\{\{a , b\}: a , b \in Z_n , \quad gcd(a - b , n) \in D\}$$

This group of graphs is called BMM graphs because of the form of its set of edges. A bipartite G graph is a graph whose vertex set can be divided into two subsets X, and Y such that no two vertices in X and no two vertices in Y are adjacent. The duplicate graph is called complete if each vertex in X is connected to all vertices in Y. This graph is represented by K_ (m, n), if | X | = m and | Y | = n. Multipartite graphs are also defined as bipartite graphs.

Keywords: Cayley Graph, Integral Graph, Circulant Graph, Multipartite Graph.

* Corresponding Author Email: safakish@basu.ac.ir